

#### 2.4.6. Uso de geogebra en la enseñanza y aprendizaje de las cónicas

**Emilio Máximo Vera Namay**

**Carlos Manuel Sabino Escobar**

Universidad Nacional de Tumbes; IREM-UNTUMBES, Perú

##### **Resumen**

*En este taller se promoverá el uso del programa libre GeoGebra como herramienta para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, así como para facilitar la preparación de hojas de trabajo que los profesores utilizan en sus sesiones de enseñanza aprendizaje. Se desarrollarán actividades, con el objetivo de articular los registros de representación algebraico y geométrico de las secciones cónicas. Para ello se desarrolla una secuencia que permita a los participantes, haciendo uso del GeoGebra, resolver tareas relacionadas con la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola; contenidos que forman parte del área curricular de matemática establecidos en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) de la Educación Básica Regular*

##### **Consideraciones iniciales**

Artigue (2002) afirma que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos representados. En el caso de los profesores, la investigadora afirma que estos ambientes tecnológicos pueden ser utilizados por el profesor como recursos para el desarrollo de su clase.

También, en cuanto al uso de ambientes tecnológicos que tiene como característica fundamental la manipulación directa y el arrastre, Olivero y Robutti (2001) y Grinkraut (2009) coinciden en afirmar que los ambientes de geometría dinámica, como el GeoGebra, poseen ventajas, entre las que señalan, por ejemplo, el lenguaje visual que es un nuevo medio de comunicación de conceptos matemáticos abstractos y la interactividad que estimula a los estudiantes a interesarse en diferentes contenidos matemáticos

##### **GeoGebra**

El GeoGebra es un software de geometría dinámica usado en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos y su uso puede hacerse en los diferentes niveles educativos. Este software, posee ventajas didácticas que y es considerado como un ambiente de geometría dinámica. Además, tiene dos ventanas importantes para el aprendizaje, una ventana geométrica y otra algebraica que posibilita mostrar a los estudiantes dos registros de representación de un determinado objeto matemático., Además de posibilitar el tránsito “natural” de la geometría sintética a la geometría analítica.

El uso del GeoGebra favorece el desarrollo del pensamiento geométrico de los sujetos. Porque las construcciones geométricas, que se pueden trabajar en este ambiente, permiten que los estudiantes conjeturen propiedades de los objetos geométricos representados.

### Actividades del taller

Las actividades del taller se desarrollan en dos sesiones de enseñanza aprendizaje. En la primera sesión, se trabajan actividades para que el participante conozca las bondades que ofrece el GeoGebra, además de explorar algunos recursos, funciones y herramientas. En la segunda sesión se trabajarán actividades relacionadas con las cónicas mostrando en todo momento la interacción de las representaciones algebraica y geométrica. Al final se reflexionará sobre el uso correcto de estos ambientes tecnológicos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, en particular de la geometría.

### SESIÓN 01:

#### INTRODUCCIÓN AL USO DE GEOGEBRA.

#### ACTIVIDAD 01:

Usando el software GeoGebra grafique los puntos en la vista grafica con la herramienta



, dados en la tabla de abajo.


$x$	1	-3	-2	5
$y$	1	4	-4	3

Haciendo **clic derecho** en el punto de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** de punto.

También se puede ingresar el punto en la barra de entrada **Entrada: (3,-3)**, y pulsamos **ENTER**.

### ACTIVIDAD 02:

Usando el software GeoGebra grafique los siguientes segmentos en la vista grafica con la

herramienta  tocando los dos puntos extremos, de los segmentos dados.


$$\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CD} \text{ y } \overline{DA}$$

Haciendo **clic derecho** en el segmento de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** del segmento.

También se puede ingresar el segmento en la barra de entrada **Entrada: Segmento(A, C)**, y pulsamos **ENTER**.

### ACTIVIDAD 03:

Usando el software GeoGebra grafique los siguientes rectas perpendiculares en la vista

grafica con la herramienta  que pasa por el punto dado y es perpendicular al segmento o recta dada.

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto  $A \perp \overline{BC}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto  $B \perp \overline{CD}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto  $D \perp \overline{BC}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto  $A \perp \overline{CD}$

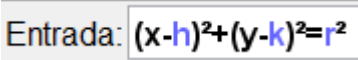
Haciendo **clic derecho** en recta perpendicular de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** del segmento.

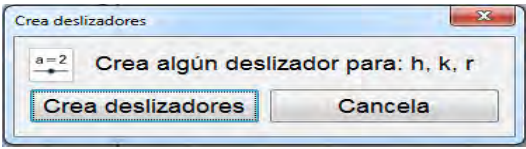
## SESIÓN 02:


### CIRCUNFERENCIA.


#### ACTIVIDAD 01:


Usando software GeoGebra graficaremos la circunferencia dada en su forma ordinaria.

**Primero:** En la barra de entrada  ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.

**Segundo:** Aparece la ventana  , damos **click** en *crea deslizadores*, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k y r.

**Tercero:** En la barra de entrada  digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece el centro de la circunferencia en el registro gráfico.

**Cuarto:** Con la herramienta  , colocamos un punto sobre la circunferencia y después

trazamos con la barra de herramienta  el segmento del centro de la circunferencia con el punto que esta sobre la circunferencia. Después damos **click** derecho y **click** en animación. Así mismo en el segmento (radio), damos **click** derecho y vamos a **propiedades, básico, Nombre: valor**.

#### ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes ejercicios relacionados con la circunferencia.

1. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas  $-x + 3y - 3 = 0$  ,  $x + y - 5 = 0$  , y su radio es igual a 4.
2. Determinar las coordenadas del centro y del radio de la circunferencia:  
 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 30 = 0$ .
3. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación:  
 $x^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  y que pasa por el punto  $(-1; 3)$ .
4. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia  
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$  que sea tangente a la recta:  $x - 4y + 12 = 0$ .
5. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices  
 $A(1; -2)$  ,  $B(4; -1)$  ,  $C(6; 5)$ .
6. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos  
 $A(-3; 2)$  y  $B(4; -1)$ . ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

### SESIÓN 03:

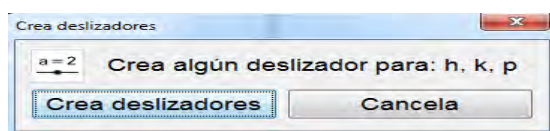
#### PARÁBOLA.

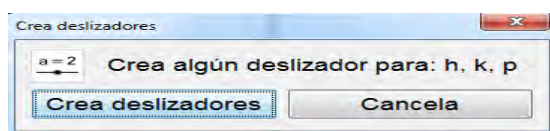
Usando software GeoGebra graficaremos la parábola dada en su forma ordinaria.

**Primero:** En la barra de entrada


Entrada:  $(y-k)^2=4p(x-h)$

ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.




**Segundo:** Aparece la ventana , damos **click** en *crea deslizador*, y en el registro gráfico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros  $h$ ,  $k$  y  $p$ .




**Tercero:** En la barra de entrada  digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra  $c$ , y pulsamos **ENTER**, y aparece el foco de la parábola en el registro gráfico.




**Cuatro:** En la barra de entrada  digitamos vértice y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra  $c$ , y pulsamos **ENTER**, y aparece el vértice de la parábola en el registro gráfico.




**Cinco:** En la barra de entrada  digitamos directriz y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra  $c$ , y pulsamos **ENTER**, y aparece la recta directriz de la parábola en el registro gráfico.




**Seis:** Con la herramienta , colocamos un punto sobre la parábola y después trazamos




con la barra de herramienta  trazamos el segmento del punto que esta sobre la




parábola con el foco de la parábola. Después trazamos con la herramienta  una recta perpendicular a la recta directriz, y que pasa por el punto que esta sobre la parábola;



seguido con la herramienta  encontramos el punto de intersección de la recta perpendicular con la recta directriz, ocultamos la recta perpendicular, y con la herramienta



 trazamos el segmento desde el punto que esta sobre la parábola y el punto de intersección de la recta perpendicular con la recta directriz. Así mismo en el segmento damos **click** derecho y vamos a **propiedades, básico, valor**.

## ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.


1. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje de las ordenadas y pasa por el punto  $(4;-2)$ . Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de la directriz, longitud de su lado recto y trazar la gráfica correspondiente.
2. Hallar el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es  $(y-3)^2 = -12(x+5)$ .
3. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuya directriz es la recta que tiene por ecuación  $y+5=0$  y su foco es el punto  $(-1;3)$ .
4. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuyo foco es el punto  $(8;-3)$  y su vértice  $(8;1)$ .
5. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuya directriz es la recta que tiene por ecuación  $y-3=0$  y su vértice es el punto  $(8;10)$ .
6. Del ejercicio anterior obtener el lado recto.

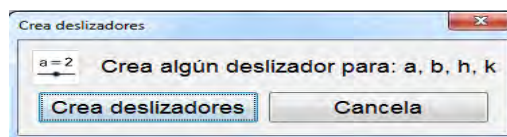
#### SESIÓN 04:

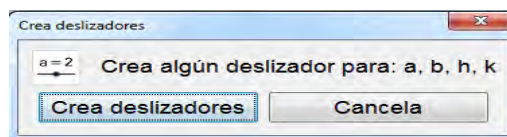
##### ELIPSE.


#### ACTIVIDAD 01:


Usando software GeoGebra graficaremos la elipse dada en su forma ordinaria.


**Primero:** En la barra de entrada  ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.





**Segundo:** Aparece la ventana , damos **clik** en *crea deslizadores*, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k, a y b.

**Tercero:** En la barra de entrada  digitamos vértices y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece los vértices de la elipse en el registro gráfico.

**Cuatro:** En la barra de entrada  digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece los focos de la elipse en el registro gráfico.

**Cinco:** En la barra de entrada  digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece el centro de la elipse en el registro gráfico.

**Seis:** Con la herramienta , colocamos un punto sobre la elipse y después con la barra de herramienta  trazamos los respectivos segmentos del punto que esta sobre la elipse con cada uno de los focos de dicha elipse, observamos que en el registro algebraico aparece el nombre y valor de cada uno de los segmentos. Si en la barra de entrada ingresamos los nombres como suma y pulsamos **ENTER**, visualizamos la nombre y valor de la suma en el registro algebraico.

## ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

1. Obtener el centro, los vértices, los focos y la gráfica de la elipse cuya ecuación es  $9x^2 + 16y^2 = 144$ .



2. Obtener el centro, los vértices, los focos y la gráfica de la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x-8)^2}{25} + \frac{(y-9)^2}{49} = 1.$$

3. Obtener la ecuación ordinaria y la gráfica de la elipse cuyos focos son los puntos  $(-5;7)$  y  $(5;7)$  y sus vértices  $(-10;7)$  y  $(10;7)$ .


4. Realizar la gráfica de la siguiente elipse y reconocer los vértices, focos y longitudes del eje mayor y menor.  $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

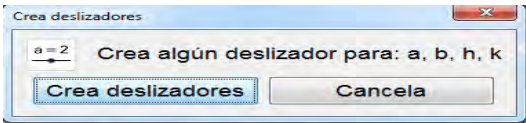
5. Realizar la gráfica de la siguiente elipse y reconocer los vértices, focos y longitudes del eje mayor y menor.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$


## SESIÓN 05:


### HIPÉRBOLA


Usando software GeoGebra graficaremos la hipérbola dada en su forma ordinaria.


**Primero:** En la barra de entrada  ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.



**Segundo:** Aparece la ventana , damos **clic** en **crea deslizador**, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros  $h$ ,  $k$ ,  $a$  y  $b$ .

**Tercero:** En la barra de entrada  digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra  $c$ , y pulsamos **ENTER**, y aparece los focos de la hipérbola en el registro gráfico.

**Cuatro:** En la barra de entrada  digitamos vértices y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece los vértices de la hipérbola en el registro gráfico.

**Cinco:** En la barra de entrada  digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparece el centro de la hipérbola en el registro gráfico.

**Seis:** En la barra de entrada  digitamos asíntota y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER**, y aparecen las asíntotas de la hipérbola en el registro gráfico y algebraico.

**Siete:** Con la herramienta , colocamos un punto sobre la hipérbola y después con la barra de herramienta  trazamos los respectivos segmentos del punto que esta sobre la hipérbola con cada uno de los focos de dicha hipérbola, observamos que en el registro algebraico aparece el nombre y valor de cada uno de los segmentos. Si en la barra de entrada ingresamos los nombres como diferencia y pulsamos **ENTER**, visualizamos la nombre y valor de la diferencia en el registro algebraico.

## ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

1. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de

la hipérbola cuya ecuación es  $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ .

2. Obtener la ecuación ordinaria y la gráfica de la hipérbola cuyos focos son los puntos  $(-5;0)$  y  $(5;0)$  y sus vértices  $(-2;0)$  y  $(2;0)$ .

3. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es  $\frac{(x+8)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$ .
4. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .
5. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es  $x^2 - y^2 = 1$ .

### Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7. Kluwer Academic Publishers, 245-274.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2008). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima, Perú.
- Grinkraut, M. L. (2009). *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional*. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.
- Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F.; Salazar, J. V. F.; Vallejo, E. (2014). *Reflexiones y propuestas en educación matemática*. Ed. Moshera. Lima, Perú
- Soo, T. (2010). *Matemática Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la Vida*; 5ta. Edición; México.

[Volver al índice de autores](#)